Spontaneous Collapse of Supersymmetry

小嶋, 泉

小嶋, 泉. Spontaneous Collapse of Supersymmetry. 数理解析研究所講究録 1997, 1013: 117-130

1997-09

数理解析研究所講究録
1013 巻 1997 年 117-130

Spontaneous Collapse of Supersymmetry

ハンブルク大理論物理学第二研究所† Detlev BUCHHOLZ
京大数理研 小嶋 泉 (Izumi OJIMA)

Abstract

ボーズ統計に従う場とフェルミ統計に従う場を相互に混ぜ合せる「超対称性」は,「力の場」(ボーズ場)と「物質場」(フェルミ場)を統合し,かつ相対論的量子場理論につきものの紫外発散を弱める高い対称性として,大きな理論的位置づけを受けている。その一方で,超対称理論に固有の「super partner」粒子を探し求める数多くの大規模な加速器実験の試みにもかかわらず,これまで現実世界にはこのような粒子の存在を支持するような実験的証拠は一つも見つかっていない。

ここでは,真空 $T = 0°K$ を除く任意の空間並進不変状態において,「超対称性変換」は常に強い自発的破れ(= spontaneous collapse)を被り,そのため真空状況以外ではこの変換を生成する supercharges は存在しない,という命題を証明する。したがって,例えばどんな有限温度の熱平衡状態でも超対称性は破れることになる。

通常の(ボーズ的な)対称性の自発的破れでは,破れた状態すべてを寄せ集めその平均を取ることによって,破れた対称性を回復することが可能である。それに対して,今の破れの場合それが不可能で,超対称性は完全に潰れてしまう。従来「supertrace」によるひねりを入れることで超対称性を救うことができると信じられてきたが,上の帰結に伴ってこの期待も覆される。

1 はじめに

真空 $(T = 0°K)$ 以外の有限温度 $T \neq 0°K$ での熱平衡状態において,超対称性は(自発的に)破れるか否か?この問いに関する10数年以上に亘る議論にもかかわらず,これまで明快なコンセンサスはなく,極めて紛糾した理論状況にあった (see [1, 2, 3])。

ここでは,熱平衡状態に限定せず空間並進不変性のみを仮定した非常に一般的な状況を設定し,

《真空 $T = 0°K$ を除く任意の空間並進不変状態において,「超対称性変換」は常に強い自発的破れ spontaneous collapse を被り,真空状況以外ではこの変換を生成する supercharges は存在しない》,

という命題を証明する(詳細は [4] 参照)。有限温度の熱平衡状態での超対称性の破れは,この命題の特殊ケースである(「強い自発的破れ(= spontaneous collapse)」の意味については,以下で説明)。

これまでの議論が確定的な帰結を提示し得なかった理由は,以下のような重要な諸点が見過されてきたところに見出される。

1) 「熱力学的極限」(=無限体積での系の均質化)の必要性:

有限系での議論では,「境界」からの偶然的影響の介入のため明確な criterion が得られない

⇒ 周知の Gibbs 公式 $\langle A\rangle = \mathrm{Tr}e^{-\beta H}A/\mathrm{Tr}e^{-\beta H}$ は,有限体積でしか意味がなく熱力学的極限で

† '97 年4月以降, Inst.f.Theor.Physik, Univ.Göttingen

は使えない！(See, e.g. [5])

⇒ symmetry generator を current density の体積積分で表す式 $Q = \lim_{V \nearrow \mathbb{R}^3} \int_V d^3x j_0$ と熱力学的極限とは，極限順序の交換不可能

⇓

2) Symmetry generators の「くりこみ」の必要性：

a) generator の表式 $Q = \int d^3x j_0$ は真空以外では一般に正当化されない

b) 混合状態での commutant の自由度 ⇒ 「くりこみ」による救済可能性と不定性

⇒「熱的状態では，エネルギーが消えないから supersymmetry は自発的破れを被るはず」との議論は無意味

3) 「対称性の破れ」とは？ ⇒ 「代数的変換」と「generator の存在」との区別の必要性：

⇓

これを論ずるためには，対称性と熱力学的「相」との関係を明らかにする必要あり

⇒ Spontaneous breakdown vs. spontaneous collapse

A. 純粋相と混合相／オーダーパラメータ／クラスター性／中心分解

a. 純粋相：巨視的なオーダーパラメーターが定まったシャープな値をとる状態で，クラスター性を満たす。(factorial state with trivial centre)

b. 混合相：巨視的オーダーパラメーターが（古典）確率的に揺らいでいる状態で，クラスター性を破る。(centre non-trivial)

NB：純粋相／混合相と純粋状態／混合状態の異同に注意。熱力学的状態は，純粋相も混合相もすべて「混合状態」で，真空状態 $T = 0°K$ の時のみ，純粋相＝純粋状態，混合相＝混合状態 (see e.g. [6])。

ここで，

・クラスター性（＝エルゴード性）：空間的遠方で局所的物理量の間の相関が切れること。

・任意の状態は，クラスター性を満たす純粋相にまで一意的に分解できる
＝「中心分解」（＝エルゴード分解）。

NB：一般に，純粋状態にまで一意分解できるとは限らない。

B. 対称性の破れのパターン：

i) 破れていない対称性を持つ純粋相 (unbroken symmetry)

ii) 純粋相において破れた対称性が適当な混合相を取ると回復する場合 (spontaneous symmetry breakdown)

周知の例) 強磁性体における空間回転の破れとその回復：

$\omega_{\boldsymbol{\theta}}$ を $\boldsymbol{\theta}(=(\vartheta,\varphi))$ 方向に磁化された強磁性体の状態とすると，オーダーパラメータ＝磁化 $\propto \boldsymbol{\theta}$。$\Rightarrow$ この状態に対応する状態空間 $\mathcal{H}_{\boldsymbol{\theta}}$ の中で空間回転は ($\boldsymbol{\theta}$ 軸の周りの回転を除いて) 実現できない。[$\because$) $\mathcal{H}_{\boldsymbol{\theta}}$ と「直交する」別の状態空間 $\mathcal{H}'_{\boldsymbol{\theta}}$ に飛出すから。]

しかし，このような状態をあらゆる立体角について平均した状態 $\omega = \int d\boldsymbol{\theta}\, \omega_{\boldsymbol{\theta}}$ は，任意の無限小回転 δ の下で不変：$\omega \circ \delta = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega$ に対応する「拡大された」状態空間 $\int d\boldsymbol{\theta}^{1/2}\, \mathcal{H}_{\boldsymbol{\theta}}$ の中では，任意の空間回転の generator が存在する。これが通常の「対称性の自発的破れ」。

iii) **これまで知られていなかった第３のケース**として spontaneous collapse

＝どのような混合相を取っても回復しない対称性

以下では，上記 1), 2), 3) の諸点を踏まえて，真空 $T = 0°K$ 以外の状況で超対称性がどのような性質を持つかを論ずる：

1) を満たすために：無限系の量子場理論の代数的定式化,

2) を満たすために：(超) 対称性変換の代数的定式化,

3) を満たすために：任意の状態における “implementability” の一般的定義。

2　Supercharge の在り方

[通常の超対称性の扱い]

基本場の超対称性変換 & その下での作用積分の不変性 $\Rightarrow$ supercurrents $j_{\mu\alpha}(x), j^{\dagger}_{\nu\dot{\beta}}(x)$ とその保存：

$$\partial^{\mu}\, j_{\mu\alpha}(x) = \partial^{\nu}\, j^{\dagger}_{\nu\dot{\beta}}(x) = 0$$

$\Rightarrow$ Supercharge = 初めの変換の generator としての保存 charge ：

$$Q_{\alpha} \stackrel{?}{=} \text{“}\int d^3\boldsymbol{x}\; j_{0\alpha}(x)\text{”}, \quad Q^{\dagger}_{\dot{\beta}} \stackrel{?}{=} \text{“}\int d^3\boldsymbol{x}\; j^{\dagger}_{0\dot{\beta}}(x)\text{”}$$

NB：右辺の意味づけは非常に微妙 !! $\Rightarrow$ symmetry breakdown or not ?

[超対称性の代数的定式化]

基本場 (generic に $\varphi(x)$ と書く）に対する超対称性変換を与え，それを field algebra $\mathcal{F}$ 上に anti-derivation として拡大［ただし，$\mathcal{F}$： (smeared) field operator $\varphi(f) = \int d^4x\, \varphi(x) f(x)$　(f : compact support の test function) についての polynomial $F=\sum c\,\varphi(f_1)\,\varphi(f_2)\cdots\varphi(f_n)$ から生成される Op*-algebra, or それから導かれる C*-algebra。]

⇒ 特定の表現に依らない超対称性変換の代数的定式化

このためにまず

Boson / Fermion の区別： field operators の 2π の回転γ に対して

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\pm &\equiv \{F_\pm\in\mathcal{F};\ \gamma(F_\pm)=\pm F_\pm\},\quad \pm:\text{Boson/Fermion},\\ \mathcal{F} &= \mathcal{F}_+ + \mathcal{F}_-.\end{aligned}$$

⇒ $\mathcal{F}$ の $\mathbb{Z}_2$-grading : $\mathcal{F}_\pm\mathcal{F}_\pm\subseteq\mathcal{F}_+,\quad \mathcal{F}_\pm\mathcal{F}_\mp\subseteq\mathcal{F}_-$.

超対称性変換は, "($\mathbb{Z}_2$-)graded" Leibniz rule を満たす anti-derivations :

$$\delta_\alpha(F_\pm F)=\delta_\alpha(F_\pm)F\pm F_\pm\delta_\alpha(F), \tag{1}$$

$$\bar{\delta}_{\dot\beta}(F_\pm F)=\bar{\delta}_{\dot\beta}(F_\pm)F\pm F_\pm\bar{\delta}_{\dot\beta}(F). \tag{2}$$

ただし, $F_\pm\in\mathcal{F}_\pm, F\in\mathcal{F}$。そして,

$$\delta_\alpha(\mathcal{F}_\pm)\subset\mathcal{F}_\mp,\quad \bar{\delta}_{\dot\beta}(\mathcal{F}_\pm)\subset\mathcal{F}_\mp \tag{3}$$

を満たす。

エルミート共役に対して：

$$\delta_\alpha(F_\pm)^\dagger=\mp\,\bar{\delta}_{\dot\alpha}(F_\pm^\dagger). \tag{4}$$

時空並進変換 : Field operator $F=\sum c\,\varphi(f_1)\,\varphi(f_2)\cdots\varphi(f_n)\in\mathcal{F}$ に対して

$$\alpha_x : F\mapsto\alpha_x(F)=F(x)=\sum c\,\varphi(f_{1,x})\,\varphi(f_{2,x})\cdots\varphi(f_{n,x}),\qquad \text{with } f_{i,x}(y)=f_i(y-x)$$

と表わす。Lorentz frame を選んで $x=(x_0,\ \boldsymbol{x})\in\mathbb{R}^4$ と書き,

- 時間並進 : $\alpha_{x_0}\equiv\alpha_{(x_0,\mathbf{0})},\quad \alpha_{x_0}(F)\equiv F(x_0)\ \ (F\in\mathcal{F})$,
- 空間並進 : $\alpha_{\boldsymbol{x}}\equiv\alpha_{(0,\boldsymbol{x})},\quad \alpha_{\boldsymbol{x}}(F)\equiv F(\boldsymbol{x})\ \ (F\in\mathcal{F})$

と略記。無限小時間推進を $\delta_0=-id\alpha_{x_0}/dx_0|_{x_0=0}$ とすると,

超対称性の基本関係式 : $\bar{\delta}_{\dot 1}\circ\delta_1+\delta_1\circ\bar{\delta}_{\dot 1}+\bar{\delta}_{\dot 2}\circ\delta_2+\delta_2\circ\bar{\delta}_{\dot 2}=4\delta_0$

ただし, $\circ$ は $\mathcal{F}$ 上の map の写像としての合成。

Remark: これは，$\sum_{\alpha=1}^{2}\{Q_\alpha,\ Q_\alpha^\dagger\}=4H$ という（存在するかどうかわからない）supercharges に対する周知の基本関係式を意味のある形に一般化したもの。

証明すべき命題：ω を任意の空間並進不変状態とするとき，この状態において超対称性が破れないならば，ω は真空にほかならない。

Remarks:

1. 「ω が任意の空間並進不変状態である」とは?:「状態」ω とは，Field algebra $\mathcal{F}$ 上の規格化された正値線型汎関数としての「期待値汎関数」$\mathcal{F}\ni F\mapsto\omega(F)$ のこと。状態 ω が空間並進不変であるとは，$\omega\circ\alpha_{\boldsymbol{x}}=\omega$ for $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ を満たすことで，これより
$$\omega(F)=\omega(F(\boldsymbol{x}))=\frac{1}{|V|}\int_V d^3\boldsymbol{y}\ \omega(F(\boldsymbol{y})) \tag{5}$$
が任意の有界な空間領域 $V\subseteq\mathbb{R}^3$ ($|V|$：体積）に対して成立つ。

2. 上の意味での状態 ω が与えられると，GNS 構成法 [7] によっていつでも［状態空間 $\mathcal{H}_\omega$］，［基準ベクトル $\Omega_\omega\in\mathcal{H}_\omega$］と［$\mathcal{H}_\omega$ における $\mathcal{F}$ の表現 π_ω］を
$$\omega(F)=\langle\Omega_\omega,\pi_\omega(F)\Omega_\omega\rangle,\qquad \mathcal{H}_\omega=\overline{\pi_\omega(\mathcal{F})\Omega_\omega}. \tag{6}$$
が成立つように構成できる。（以下簡単のため，表現 π_ω の記号は省いて書く。）

3. 「超対称性が破れない」とは?: See (b) below.

4. 「真空」とは?: See (c) & (d) below.

証明のステップ：

(a) Bose-Fermi 超選択則の成立

(b) 超対称性が「破れない」ことの定義：非常に弱い意味での「破れない」(i.e. implementability) と強い意味での「破れない」(i.e. invariance) との同等性

(c) 破れない超対称性からエネルギーの正値性の導出（→ 真空）

(d) 熱平衡状態でのエネルギーの正定値性の破れ

(a) Bose-Fermi 超選択則：ω において unbroken, i.e., $\omega\circ\gamma=\omega$,

or equivalently

$$\omega(F_-)=0 \quad \text{for } F_-\in\mathcal{F}_-$$

証明）$F_-\in\mathcal{F}_-$ を任意の fermionic operator として，ω の空間並進不変性 Eq.(5) とＧＮＳ構成法 Eq.(6) とを組合わせると，

$$\omega(F_-)=\omega(F_-(\boldsymbol{x}))=\frac{1}{|V|}\int_V d^3\boldsymbol{x}\ \langle\Omega_\omega,\,F_-(\boldsymbol{x})\,\Omega_\omega\rangle. \tag{7}$$

Fermion 場の従う局所反可換性より

$$\lim_{V\nearrow\mathbf{R}^3}\|\frac{1}{|V|}\int_V d^3\boldsymbol{x}F_-(\boldsymbol{x})\,\Omega_\omega\|=0 \tag{8}$$

が従う：

$$\begin{aligned}
&\|\frac{1}{|V|}\int_V d^3\boldsymbol{x}F_-(\boldsymbol{x})\,\Omega_\omega\|^2+\|\frac{1}{|V|}\int_V d^3\boldsymbol{x}F_-(\boldsymbol{x})^\dagger\,\Omega_\omega\|^2\\
=\;&\frac{1}{|V|}\int_V d^3\boldsymbol{x}\,\frac{1}{|V|}\int_V d^3\boldsymbol{y}\ \omega(\{F_-(\boldsymbol{x})^\dagger,\,F_-(\boldsymbol{y})\})\\
\le\;&\frac{1}{|V|}\int d^3\boldsymbol{z}\ |\omega(\{F_-(\boldsymbol{z})^\dagger,F_-\})|\ \underset{V\nearrow\mathbf{R}^3}{\longrightarrow}0.
\end{aligned}$$

最後の式の anti-commutator は，局所反可換性によって $\boldsymbol{z}$ の十分大きなところで消えてしまうので，$\int d^3\boldsymbol{z}$ が存在することに注意。Eqs.(7), (8) より，$\omega(F_-)=0$ がしたがう。

(b) Implementability の定義とその帰結としての invariance:

定義：「状態 ω において超対称性が *implementable* である」とは，状態空間 $\mathcal{H}_\omega$ の operators $Q_\alpha, Q^\dagger_{\dot\beta}$ (=hermitian conjugate of Q_β) で，$F\,\Omega_\omega, F\in\mathcal{F}$ の形のベクトルをすべてその定義域に含み，かつ関係式

$$\begin{aligned}
Q_\alpha F_\pm\,\Omega_\omega &= \delta_\alpha(F_\pm)\,\Omega_\omega\pm F_\pm Q_\alpha\,\Omega_\omega, &(9)\\
Q^\dagger_{\dot\beta}F_\pm\,\Omega_\omega &= \bar\delta_{\dot\beta}(F_\pm)\,\Omega_\omega\pm F_\pm Q^\dagger_{\dot\beta}\,\Omega_\omega &(10)
\end{aligned}$$

を満たすものが存在することをいう。

Remarks: (i) 上の定義では，基準ベクトル Ω_ω の「不変性」$Q_\alpha\,\Omega_\omega=Q^\dagger_{\dot\beta}\,\Omega_\omega=0$ は仮定していないことに注意。また，前節 2)b) の thermal states における symmetry generators の「くりこみ」の必要性および commutant による不定性を考慮すると，(超対称性変換が代数的な意味で時空並進と交換す

るからと言って）Q_α および $Q^\dagger_{\dot\beta}$ の並進不変性も仮定すべきではなく，以下の議論でそういう性質は用いない。

(ii) 上の見方を一般化し，任意のベクトル $\hat\Psi_\alpha, \check\Psi_{\dot\beta}$（ただし，$\mathcal{F}$ が非有界の場合には，$\mathcal{F}$ のすべての operators の定義域に属するベクトル）を取って，

$$\begin{aligned}\hat{Q}_\alpha F_\pm \Omega_\omega &= \delta_\alpha(F_\pm)\,\Omega_\omega \pm F_\pm \hat\Psi_\alpha,\\ \check{Q}_{\dot\beta} F_\pm \Omega_\omega &= \bar\delta_{\dot\beta}(F_\pm)\,\Omega_\omega \pm F_\pm \check\Psi_{\dot\beta}\end{aligned}$$

とおけば，自発的破れの如何にかかわらず generator（もどき）を定義することは，基準ベクトル Ω_ω が「分離的」(i.e., $F\,\Omega_\omega = 0 \Rightarrow F = 0$ for $F \in \mathcal{F}$ が成立つ）である限り，いつでも可能。(真空の場合は Reeh-Schlieder の定理で，熱平衡の場合は KMS 条件により分離性は成立つ。See [5, 6].)

$\Rightarrow$ この見方において，超対称性が破れるか否かは,「$\hat\Psi_\alpha, \check\Psi_{\dot\alpha}$ をどう選んでも，$\hat{Q}_\alpha, \check{Q}_{\dot\alpha}$ を互いに hermite 共役にすることができない」，という形で判定される。破れる場合，これらの operators は閉作用素でない等，種々の病理的な性質を持つことになる。

上の意味で超対称性が ω において implementable ならば，それは通常の意味で unbroken, i.e.,

$$\omega \circ \delta_\alpha = \omega \circ \bar\delta_{\dot\beta} = 0,$$

が成立つ。

証明）$F_+ \in \mathcal{F}_+ \;\Rightarrow\; \delta_\alpha(F_+), \bar\delta_{\dot\beta}(F_+) \in \mathcal{F}_-$ [Eq.(3)] だから，Bose-Fermi 超選択則 $\omega(F_-) = 0$ により直ちに

$$\omega(\delta_\alpha(F_+)) = \omega(\bar\delta_{\dot\beta}(F_+)) = 0.$$

後は fermionic operators $F_- \in \mathcal{F}_-$ に対して

$$\omega(\delta_\alpha(F_-)) = \omega(\bar\delta_{\dot\beta}(F_-)) = 0$$

を示せばよい。Implementability の定義式 Eqs.(9), (10) ＋［anti-derivation δ_α と空間並進 $\alpha_{\boldsymbol{x}}$ との可換性］から, 前の (a) と同様に

$$\begin{aligned}\omega(\delta_\alpha(F_-)) &= \frac{1}{|V|}\int_V d^3\boldsymbol{x}\ \langle \Omega_\omega,\, \delta_\alpha(F_-(\boldsymbol{x}))\,\Omega_\omega\rangle\\ &= \frac{1}{|V|}\int_V d^3\boldsymbol{x}\ \langle \Omega_\omega,\, (Q_\alpha F_-(\boldsymbol{x}) + F_-(\boldsymbol{x}) Q_\alpha)\,\Omega_\omega\rangle.\end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz 不等式により，

$$|\omega(\delta_\alpha(F_-))| \le \|Q^\dagger_\alpha \Omega_\omega\| \cdot \|\frac{1}{|V|}\int_V d^3x\ F_-(\boldsymbol{x})\,\Omega_\omega\| + \|\frac{1}{|V|}\int_V d^3x\ F_-(\boldsymbol{x})^\dagger\,\Omega_\omega\| \cdot \|Q_\alpha\,\Omega_\omega\|.$$

領域 $V \subset \mathbb{R}^3$ は任意だから $V \nearrow \mathbb{R}^3$ の極限を取って Eq.(8) を右辺に適用すると，$\omega(\delta_\alpha(F_-)) = 0$ for $F_- \in \mathcal{F}_-$ を得る。全く同様に $\omega(\bar{\delta}_{\dot{\beta}}(F_-)) = 0$, $F_- \in \mathcal{F}_-$ が導かれる。

Remark：上の議論で必要なのは，Eqs.(9), (10) を満たすような supercharges が存在する，という仮定だけで，(空間並進についての) クラスター性は一切使う必要がなかった，という点が重要。このゆえに，上の結論は状態 ω が**純粋相でも混合相でも**等しくあてはまることになる。

(c) 超対称性を不変に保つ状態は真空しかないこと：

ω が超対称，$\omega \circ \delta_\alpha = \omega \circ \bar{\delta}_{\dot{\beta}} = 0$ で，かつ，Bose-Fermi 超選択則 $\omega(F_-) = 0$ を満たすなら，それは，時空並進不変でかつ相対論的スペクトル条件 (i.e., あらゆる Lorentz frame でエネルギーが正) を満足する真空状態に他ならない。

証明) 超対称性の基本関係式より $\omega \circ \delta_\alpha = \omega \circ \bar{\delta}_{\dot{\beta}} = 0$ から状態 ω の時間並進不変性も自動的に従う：

$$\omega \circ \delta_0 = 0.$$

δ_0 は $\delta_0(F)^\dagger = -\delta_0(F^\dagger)$ $(\forall F \in \mathcal{F})$ および Leibniz rule を満たす derivation であるから，

$$P_0 F\, \Omega_\omega = \delta_0(F)\, \Omega_\omega \qquad \text{for } F \in \mathcal{F}$$

によってエルミートな* operator P_0 を整合的に定義することができ，$P_0 \Omega_\omega = \delta_0(1)\Omega_\omega = 0$ および $[P_0, F] = \delta_0(F) = -idF(x_0)/dx_0|_{x_0=0}$ が成立つ：

$\because)$ $\delta_0(F)F_1\Omega_\omega = \Big(\delta_0(FF_1) - F\delta_0(F_1)\Big)\Omega_\omega = P_0FF_1\Omega_\omega - FP_0F_1\Omega_\omega = [P_0, F]F_1\Omega_\omega$。

よって，$[\omega \circ \delta_\alpha = \omega \circ \bar{\delta}_{\dot{\beta}} = 0]$ ＋ 基本関係式 $\Rightarrow \omega(F^\dagger\delta_0(F)) \geq 0$ $(\forall F \in \mathcal{F})$ を示せば，

$$\langle (F\Omega_\omega), P_0\,(F\,\Omega_\omega)\rangle = \langle \Omega_\omega, F^\dagger\, P_0\, F\,\Omega_\omega\rangle = \omega(F^\dagger\delta_0(F)) \geq 0$$

より P_0 は $P_0\Omega_\omega = 0$ を満たす正のエネルギー operator，Ω_ω はその基底状態になる。

そこで，$\omega(F^\dagger\delta_0(F)) \geq 0$ $(\forall F \in \mathcal{F})$ を示そう。任意の $F \in \mathcal{F}$ は Bose/Fermi operators $F_\pm \in \mathcal{F}_\pm$ の和 $F = F_+ + F_-$ に分解でき，かつ，Bose-Fermi 超選択則より $\omega(F_\pm^\dagger\delta_0(F_\mp)) = 0$ だから，$\omega(F_\pm^\dagger\delta_0(F_\pm))$ だけを考えればよい。基本関係式より従う

$$4\omega(F_+^\dagger\,\delta_0(F_+)) = \omega(F_+^\dagger\,(\bar{\delta}_{\dot{1}} \circ \delta_1 + \delta_1 \circ \bar{\delta}_{\dot{1}} + \bar{\delta}_{\dot{2}} \circ \delta_2 + \delta_2 \circ \bar{\delta}_{\dot{2}})(F_+))$$

の右辺第 1 項で anti-derivations $\delta_\alpha, \bar{\delta}_{\dot{\beta}}$ の graded Leibniz rule とエルミート共役性 Eq.(4) を考慮すると

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{\dot{1}}(F_+^\dagger\,\delta_1(F_+)) &= \bar{\delta}_{\dot{1}}(F_+^\dagger)\,\delta_1(F_+) + F_+^\dagger\,\bar{\delta}_{\dot{1}}(\delta_1(F_+)) \\ &= -\delta_1(F_+)^\dagger\,\delta_1(F_+) + F_+^\dagger\,\bar{\delta}_{\dot{1}} \circ \delta_1(F_+). \end{aligned}$$

*基本場の temperedness を使うと P_0 が定義域において essentially self-adjoint になることも示せる。

$\omega \circ \bar{\delta}_{\dot{1}} = 0$ だから,

$$\omega(F_+^\dagger \bar{\delta}_{\dot{1}} \circ \delta_1(F_+)) = \omega(\delta_1(F_+)^\dagger \delta_1(F_+)) \geq 0.$$

他の項についても同様にして,$\omega(F_+^\dagger \delta_0(F_+)) \geq 0$ を得る。F_+ を $F_- \in \mathcal{F}_-$ で置換えた場合にも,同様の結論が得られるので,結局

$$\omega(F^\dagger \delta_0(F)) \geq 0 \qquad \text{for } F \in \mathcal{F}.$$

次に ω が任意の Lorentz frame で基底状態になること:

(Supercurrents $j_{\mu\alpha}$ の spinor としての変換性から) $A \in SL(2,\mathbb{C})$ に対応する $\delta_\alpha, \bar{\delta}_{\dot{\beta}}$ の Lorentz 変換は

$$\delta_\alpha{}' = A_\alpha{}^\beta \delta_\beta, \quad \bar{\delta}_{\dot{\alpha}}{}' = \overline{A_\alpha{}^\beta}\, \bar{\delta}_{\dot{\beta}} = \bar{A}_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \bar{\delta}_{\dot{\beta}}$$

によって与えられ,Lorentz frame の変更はこのように写像の線型変換を引き起す。$\Rightarrow$ 一つの Lorentz frame で $\omega \circ \delta_\alpha = \omega \circ \bar{\delta}_{\dot{\beta}} = 0$ が成立てばすべての frame で成立つ。このことと,Lorentz 変換された $\delta_\alpha{}', \bar{\delta}_{\dot{\beta}}{}', \delta_0{}'$ に対する基本関係式とを合わせ,「$'$ 」を付けて先の議論を繰返せば,$P_0{}'$ およびΩ_ω について同じ結論を得る。よって,ω は真空。

(d) 温度平衡状態ではエネルギースペクトルが正定値になり得ないこと:

既述のように,(一般に混合状態における) generators の定義には種々の非一意性が含まれる。しかし,上の状態 ω が温度 $\beta^{-1} > 0$ の熱平衡を記述し得ないことは,それとは無関係に確められる。以下,$P_0 \geq 0$ の条件が熱平衡を一般的に特徴づける KMS 条件と両立し得ないことを示す。

$F(g) = \int dx_0\, g(x_0) F(x_0)$ の形の operator に対して $F(g)\,\Omega_\omega = (2\pi)^{1/2} \tilde{g}(P_0) F\,\Omega_\omega$ ($\tilde{g}$ は g の Fourier 変換)。$P_0 \geq 0$ の条件より,$\tilde{g}$ の support が負軸上にしかなければ,$F(g)\,\Omega_\omega = 0$。

もし ω が或る温度 β^{-1} で KMS 条件を満たすとすれば,関数 $x_0 \mapsto \omega(\,F_1\,(F_2^\dagger\, F(g))(x_0)\,)$ $(F_1, F_2 \in \mathcal{F})$ は複素領域 $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Im} z < \beta\}$ の解析関数に解析接続され,$\mathrm{Im} z = \beta$ における境界値が $x_0 \mapsto \omega(\,(F_2^\dagger\, F(g))(x_0)\, F_1\,)$ となる。したがって,

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$ に対して $\omega(\,F_1\,(F_2^\dagger\, F(g))(x_0)\,) = \langle \Omega_\omega,\, F_1\, F_2^\dagger(x_0)\, F(g)(x_0)\, \Omega_\omega \rangle = 0$

$\Rightarrow \quad 0 = \omega(\,F_2^\dagger\, F(g)\, F_1\,) = \langle \Omega_\omega,\, F_2^\dagger\, F(g)\, F_1\, \Omega_\omega \rangle = \langle F_2 \Omega_\omega,\, F(g)\,(F_1\, \Omega_\omega) \rangle.$

$\Rightarrow \quad F_1, F_2$: 任意ゆえ $F(g) = 0$。

$F^\dagger(g)$ についても同じ議論により,$F^\dagger(g) = 0$ を得るから,$F(\bar{g}) = F^\dagger(g)^\dagger = 0$。

よって，原点近傍で Fourier 変換 $\tilde{g}=0$ となる任意の g に対して，$F(g)=0$。 $\Rightarrow$ 関数 $x_0 \mapsto F(x_0)$ は x_0 の polynomial，更に ω の時間並進不変性より $\omega(F(x_0)^\dagger F(x_0))=\omega(F^\dagger F)$ だから，結局定数となる。つまり，すべての $F\in\mathcal{F}$ と $x_0\in\mathbb{R}$ について $F(x_0)=F \Rightarrow$ trivial dynamics !

したがって，(そういう無意味な場合を除いて) ω が KMS 条件を満たすことはあり得ない。

要約すると：任意の空間並進不変状態 ω において

1. Bose-Fermi 超選択則は常に unbroken
2. $\mathcal{H}_\omega$ において超対称性変換の generators (= supercharges) が存在すれば，この状態は超対称性不変：$\omega\circ\delta_\alpha=\omega\circ\bar{\delta}_{\dot{\beta}}=0$
3. 1.& 2. の性質をもつ状態は $T=0°K$ の真空のみ。
4. したがって，熱平衡状態では純粋相・混合相の別なく，常に超対称性は破れ，supercharges は存在し得ない。混合相に移っても対称性を回復することは不可能　[spontaneous collapse]。

3 Supertrace の役割

Supertrace "STr=Tr($e^{i\pi Q_F}\cdot$)" と superthermal ensemble "s_β=STr($e^{-\beta H}\cdot$)"

E.g. STr(1)=Tr($e^{i\pi Q_F}$)="Witten index".

後者を van Hove [8] に従って，bosonic および fermionic subensemble の状態 ω_b, ω_f 間の重みつきの差 $s=p_b\,\omega_b-p_f\,\omega_f$ として与えられた $\mathcal{F}$ 上の線型汎関数 s と解釈して，その熱力学的極限の状況を考える。p_b, p_f は非負の重みで，$p_b+p_f=1$ により規格化されているとする。

しばしば超対称性変換 δ_α, $\bar{\delta}_{\dot{\beta}}$ の下でのこの s の振舞いが，超対称性の自発的破れの適切な判定条件を与えるとして，「$s\circ\delta_\alpha=s\circ\bar{\delta}_{\dot{\beta}}=0$ のとき unbroken supersymmetry，そうでないとき spontaneously broken supersymmetry」(see e.g.[3])，という主張がなされる。これは正しいか？ $\Rightarrow$ NO!

Supertrace states についての命題：空間並進不変な状況では，次の２通りの可能性のみ：

i) $s=0$　(i.e., trivial case),

or

ii) $s\circ\delta_\alpha\neq 0$ かつ $s\circ\bar{\delta}_{\dot{\beta}}\neq 0$

$\Rightarrow$ Supersymmtric superthermal ensemble は 0 しかない！

Remark

このことの物理的意味： $s=0$ なら，$p_b=p_f$ かつ $\omega_b=\omega_f$。⇒ "bosonic phase" と "fermionic phase" の区別はできない。［ただし，$\omega_b=\omega_f$ が複数の相の混合でもあり得るから，単一相しかない，と即断するのは誤り。］他方，$s\neq 0$ の場合は２つの可能性がある：

(i) 少なくとも２つの異なる相がある［$\omega_b\neq\omega_f$］か，

または

(ii) $\omega_b=\omega_f$ だが $p_b\neq p_f$。

後者は物理的に意味のある状況では起きないという議論がある (e.g. [8]) が，supercharge の存在を前提しており，熱力学的極限で成立つかどうかは不明。⇒ (i) だけかどうかの判定には，例えば，positive operator の superaverage $s(F^\dagger F)$ が $F\in\mathcal{F}$ の取り方次第で正にも負にもなるというような形で，詳しい吟味が必要。

こういう形で用いれば，supertrace の概念は，超対称性理論の相構造に関する情報を引出すのに使い得る。しかし，trivial な場合 $s=0$ を別にすれば，supertrace を用いた判定条件の意味でも，有限温度で超対称性が回復する見込みはない。

証明）s についての上の命題を二段階に分けて証明する。最初に，bosonic および fermionic subensembles が純粋相の場合に限定して，クラスター性を次の弱い形で使う：

$$\frac{1}{|V|}\int_V d^3\boldsymbol{x}\;\omega_{b,f}(F_1(\boldsymbol{x})F_2)-\omega_{b,f}(F_1)\omega_{b,f}(F_2)\;\underset{V\nearrow\mathbb{R}^3}{\longrightarrow}\;0. \tag{11}$$

s の超対称性変換不変の仮定 $s\circ\delta_\alpha=0$ と graded Leibniz rule Eq.(1) とから，任意の $F_\pm\in\mathcal{F}_\pm$ に対して

$$0=s(\delta_\alpha(F_-(\boldsymbol{x})\,F_+))=s(\delta_\alpha(F_-(\boldsymbol{x}))\,F_+-F_-(\boldsymbol{x})\,\delta_\alpha(F_+)).$$

s の分解 $s=p_b\,\omega_b-p_f\,\omega_f$ を代入して

$$p_b\,\omega_b(\delta_\alpha(F_-(\boldsymbol{x}))\,F_+-F_-(\boldsymbol{x})\,\delta_\alpha(F_+))=p_f\,\omega_f(\delta_\alpha(F_-(\boldsymbol{x}))\,F_+-F_-(\boldsymbol{x})\,\delta_\alpha(F_+)). \tag{12}$$

δ_α は空間並進と可換だから，両辺の空間平均を取り，クラスター性 (11) を使うと，

$$p_b\,\big(\omega_b(\delta_\alpha(F_-))\,\omega_b(F_+)-\omega_b(F_-)\,\omega_b(\delta_\alpha(F_+))\big)=p_f\,\big(\omega_f(\delta_\alpha(F_-))\,\omega_f(F_+)-\omega_f(F_-)\,\omega_f(\delta_\alpha(F_+))\big).$$

$\omega_{b,f}$ に対して Bose-Fermi 超選択則 $\omega_{b,f}(F_-)=0$ を使えば

$$p_b\,\omega_b(\delta_\alpha(F_-))\,\omega_b(F_+)=p_f\,\omega_f(\delta_\alpha(F_-))\,\omega_f(F_+). \tag{13}$$

規格条件 $\omega_b(1)=\omega_f(1)=1$ より $p_b\,\omega_b(\delta_\alpha(F_-))=p_f\,\omega_f(\delta_\alpha(F_-))$。$\omega_{b,f}$ が thermal state だから，前節の結果により $\omega_{b,f}(\delta_\alpha(F_-))\neq 0$ となる $F_-\in\mathcal{F}_-$ が存在。よって，関係 (13) より$\omega_b=\omega_f$ と $p_b=p_f$ が出て，$s=0$ となる。

次に，$\omega_{b,f}$ が熱力学的混合相の一般の場合。このとき，状態 $\omega=p_b\omega_b+p_f\omega_f$ は純粋相 ω_θ の和に分解できる (中心分解) ：

$$
\begin{aligned}
p_b\,\omega_b &= \sum_\theta p_b(\theta)\,\omega_\theta, &(14)\\
p_f\,\omega_f &= \sum_\theta p_f(\theta)\,\omega_\theta. &(15)
\end{aligned}
$$

$p_b(\theta), p_f(\theta)$ はそれぞれ $\sum_\theta p_b(\theta)=p_b$, $\sum_\theta p_f(\theta)=p_f$ で規格化された非負の重み。

純粋相のときと同様，$s\circ\delta_\alpha=0$ の仮定から Eq.(12) に移り，上の分解 (14), (15) を代入して得られた式の空間平均を取って，極限 $V\nearrow\mathbb{R}^3$ に移行すれば，成分の純粋相 ω_θ について成立つクラスター性より，

$$
\sum_\theta p_b(\theta)\,\omega_\theta(\delta_\alpha(F_-))\,\omega_\theta(F_+)=\sum_\theta p_f(\theta)\,\omega_\theta(\delta_\alpha(F_-))\,\omega_\theta(F_+). \tag{16}
$$

[成分の純粋相が（連続）無限個の場合，正確には，総和 $\sum_\theta$ は無限和（あるいは，適当な確率測度に関する積分）になるので，上の式での極限 $V\nearrow\mathbb{R}^3$ と総和との順序交換操作に対する正当化が必要だが，技術的詳細に亘るのでここでは省略。]

Eq.(16) で F_+ を $(1/|V|)\int_V d^3\boldsymbol{x}\ (\delta_\alpha(F_-)^\dagger)(\boldsymbol{x})\,F_+$ に置換えて，純粋相に関するクラスター性を使うと，$V\nearrow\mathbb{R}^3$ の極限で

$$
\sum_\theta p_b(\theta)\,|\omega_\theta(\delta_\alpha(F_-))|^2\,\omega_\theta(F_+)=\sum_\theta p_f(\theta)\,|\omega_\theta(\delta_\alpha(F_-))|^2\,\omega_\theta(F_+). \tag{17}
$$

この操作を繰返すと，ω_θ における任意の operator F_+ の期待値の高次積を含んだ類似の関係式が得られる。$\Rightarrow$ F_- を止めて F_+ を動かすと，Eq.(17) は，２つの汎関数 $\sum_\theta p_b(\theta)\,|\omega_\theta(\delta_\alpha(F_-))|^2\,\omega_\theta$ および $\sum_\theta p_f(\theta)\,|\omega_\theta(\delta_\alpha(F_-))|^2\,\omega_\theta$ が一致することを表す。中心分解の一意性により，任意の θ に対して

$$
p_b(\theta)\,|\omega_\theta(\delta_\alpha(F_-))|^2=p_f(\theta)\,|\omega_\theta(\delta_\alpha(F_-))|^2.
$$

ω_θ は熱的状態ゆえ，$\omega_\theta(\delta_\alpha(F_-))\neq 0$ となるような $F_-\in\mathcal{F}_-$ が存在して，$p_b(\theta)=p_f(\theta)$ が成立つ。関係 (14), (15) より $s=0$ が得られ，超対称的な supertrace は自明なものしかないことがわかる。

こうして，supertrace は超対称的な理論の相構造に関する（部分的）情報を引出すために役立つとしても，この量の超対称性変換に対する振舞いは何ら付加的な情報をもたらさないことがわかった。これは，前節で得たすべての熱的状態における超対称性の自発的崩壊という帰結と整合する。

4 まとめ

得られた結論：超対称性の基本関係式が成立つような量子場理論では，真空以外のすべての空間並進不変状態において，超対称性は自発的に崩壊し，この対称性を破らない並進不変状態は真空しかない。

- 上の議論は，時空４次元での空間並進不変状態に関するもの。しかし，一般次元の場合や，より複雑な状況（e.g., 漸近的に均質な状態や空間的に周期構造を持つ状態）へも，容易に拡張可能。
- 上の証明では，基本場が point-like であることや狭い意味での局所（反）可換性は必要ではなく，field operator の (anti-) commutator の期待値が空間的遠方で十分速く減少することだけが重要。
- したがって，もし superstring の量子場理論で超対称性が適切な形に定式化されるなら，同様の結論がそこにも適用されることになる。
- 少しでも真空から離れるとあらゆる熱的状態で破れる対称性としては，上記の超対称性以外に，Lorentz symmetry の場合が以前からよく知られている [9]。上の場合との本質的な違いは，この場合，熱平衡状態を Lorentz 変換すれば，熱平衡ではなくなるが，依然として物理的に意味のある状態にとどまり，また，混合相に移ることで対称性を回復することも可能だということ。超対称性の自発的崩壊ではそういうことはあり得ない。

熱的効果に対するこのような脆弱性を考慮すると，現実世界においてどのような形で超対称性が顕現しうるのか？熱的状態での自発的破れに伴う zero energy mode は，Goldstino 粒子の形を取る必然性はなく，ただ particle-hole pair の長距離相関をもたらすだけ [10] なので，この場合あまり役に立たない。

現実の物理世界に超対称性が存在するか否かについて確かな判断を下すためには，

- 熱的状態で破れていた超対称性が，温度ゼロの極限（として得られる真空状態）で回復可能となるか否か，を明らかにすることが必要。
- 他方，ヒステリシス効果と同じような形で，この極限でも自発的崩壊したまま，という可能性もあり，この方が，超対称性が見えない現実世界の状況を説明する上でより興味深いかも知れない。

したがって，物理的に意味のある具体的モデルで，上の２つの可能性の何れが実現しているのかを明らかにすることは,（超対称性を信じる立場に立つ限り）重要な課題となる。

参考文献

[1] L. Girardello, M. Grisaru and P. Salomonson, Nucl. Phys. **B178** (1981) 331;
D. Boyanovsky, Phys. Rev. **D29** (1984) 743;
A.Das, Physica **A158** (1989) 1.

[2] J. Fuchs, Nucl. Phys. **B246** (1984) 279;
Won-Ho Kye, Sin Kyu Kang and Jae Kwan Kan, Phys. Rev. **D46** (1992) 1835

[3] L. van Hove, Nucl. Phys. **B207** (1982) 15;
T.E. Clark and S.T. Love, Nucl. Phys. **B217** (1983) 349.

[4] D. Buchholz and I. Ojima, to appear in Nucl.Phys.B.

[5] R. Haag, N.M. Hugenholtz and M. Winnink, Comm. Math. Phys. **5** (1967) 215;
I. Ojima, Ann. Phys. **137** (1981) 1.

[6] O. Bratteli and D.W. Robinson, Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics, Vols. 1 and 2 (Springer, Berlin, 1979 and 1981).

[7] R.F. Streater and A.S. Wightman, PCT, Spin and Statistics and All That (Benjamin, New York, 1964);
R. Haag, Local Quantum Physics (Springer, Berlin, 1992[1st ed.], 1996[2nd ed.]).

[8] L. van Hove, Fizika **17** (1985) 267.

[9] I. Ojima, Lecture Notes in Physics **176** (K. Kikkawa, et al. eds.) (Springer, Berlin, 1983) pp.161-165; Lett. Math. Phys. **11** (1986) 73.

[10] H. Matsumoto, N.J. Papastamatiou, H. Umezawa and N. Yamamoto, Phys. Rev. **D34** (1986) 3217.